

MARSANO
TRE TEORIE
DELLA GEOMETRIA.

N. 55





MEMORIA

SOPRA

TRE TEORIE PIU' ELEMENTARI

DELLA GEOMETRIA

678708

MEMORIA
SOPRA
TRE TEORIE PIU ELEMENTARI
DELLA GEOMETRIA

DI
G. B. MARSANO

STUDENTE DI MATEMATICA NELLA REGIA UNIVERSITA

DI GENOVA



TIPOGRAFIA DEL R. I. DE' SORDO-MUTI

1857

L'Autore intende di godere dei benefici accordati dalle vigenti leggi, e Convenzioni internazionali, riservandosi il diritto di farne eseguire la traduzione in francese entro il termine stabilito.

TEORIA

DELLE PERPENDICOLARI E DELLE OBLIQUE



N° 1. — Una retta si dice che è *perpendicolare*, od *obliqua* ad un'altra, secondo che fa con questa due angoli adiacenti uguali o disuguali: distinguerò quest'altra retta col nome di *retta sottoposta*, o semplicemente di *sottoposta*.

N° 2. — Segue da questa definizione della perpendicolare, e dal teorema — *gli angoli opposti al vertice sono uguali*, — che:

Se una retta è perpendicolare ad un'altra, reciprocamente quest'altra lo è alla prima.

TEOREMA I.

N° 3. — *Per un punto dato [C (fig. 1)] d'una retta [AB], non si può elevare che una sola perpendicolare [CD] a questa retta (*)*.

Perchè ogni altra retta CE, condotta pel punto C, sarà obliqua ad AB.

Infatti gli angoli $ACE > ACD$, $BCD > BCE$: ma per ipotesi (n° 1) $ACD = BCD$; dunque $ACE > ACD$, $ACD > BCE$; onde, a più forte ragione, $ACE > BCE$; e perciò (n° 1) CE obliqua ad AB.

TEOREMA II.

N° 4. — *Da un punto dato [C (fig. 2)], fuori di una retta [AB], non si può abbassare che una sola perpendicolare [CD] a questa retta*.

Perchè ogni altra retta CE, condotta sopra AB dal punto C, sarà obliqua ad AB.

Infatti si prolunghi CD d'una quantità $DF = DC$; si unisca F ed E per la retta FE; e si prolunghi questa retta al di là del punto E: il suo prolungamento EH cadrà nell'angolo AEC; poichè se cadesse o sopra la retta EC, o dentro l'angolo DEC, — la

(*) Leggendo la prima volta questo enunciato, con omettere le indicazioni della figura, comprese fra le parentesi quadre, si ha l'enunciato puro del teorema: quindi si leggerà una seconda volta, avvertendo i dati, su cui ragionare, per procedere alla sua dimostrazione. Una simile avvertenza si faccia in tutti i casi simili.

retta FH, che ha già un punto comune colla retta CF, verrebbe ad avere con questa un secondo punto comune, senza confondersi colla stessa; il che è impossibile. Sarà così l'angolo $AEC > AEH$; e poichè l'angolo $AEH =$ al suo opposto al vertice DEF, sarà $AEC > DEF$. Or essendo AB pure perpendicolare a CF (n° 2), — piegando la figura DEF sopra la figura DEC, attorno a DE, l'una coprirà l'altra esattamente; avendosi, con l'angolo $ADF = ADC$ (n° 2), la retta $DF = DC$; onde l'angolo $DEF = DEC$: per conseguenza sarà l'angolo $AEC > BEC$; e perciò (n° 1) CE obliqua ad AB.

N° 5. — COROLLARIO I. — *Dei due angoli disuguali [AEC, BEC], che fa un'obliqua [CE] colla sottoposta [AB], quello [BEC] è acuto, che ha l'apertura rivolta verso la perpendicolare [CD].*

Poichè avendosi $BEC < AEC$ (n° 4), ed essendo la somma $AEC + BEC = 2$ retti, sarà dunque $BEC < \frac{AEC + BEC}{2}$, < 1 retto, ossia un angolo acuto.

N° 6. — COROLLARIO II. — *La perpendicolare abbassata sopra una retta, da un punto di un'obliqua a questa, cade sempre dalla parte dell'angolo acuto dell'obliqua colla sottoposta.*

Poichè (non potendo prendere la direzione dell'obliqua) se cadesse dalla parte dell'angolo ottuso, — l'angolo dell'obliqua colla sottoposta, che ha l'apertura rivolta verso la perpendicolare, sarebbe ottuso; il che è impossibile (n° 5).

N° 7. — COROLLARIO III. — *Due rette perpendicolari a una terza non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza ambedue si immaginino prolungate.*

Poichè se si incontrassero in un punto comune, — si avrebbero da quel punto condotte due perpendicolari alla stessa retta; il che è impossibile (n.° 4).

TEOREMA III.

N° 8. — *Due oblique [CE, CF (fig. 5)] ugualmente distanti dalla perpendicolare [CD], da un punto [C] della quale si partono, — sono uguali in lunghezza, ugualmente inclinate alla perpendicolare [CD], ed ugualmente inclinate alla sottoposta [AB].*

Si pieghi la figura CDE sulla figura CDF, attorno a CD: coprirà l'una esattamente l'altra; avendosi per ipotesi l'angolo $ADC = BDC$, e la distanza $DE = DF$; onde sarà $CE = CF$, l'angolo $DCE = DCF$, e l'angolo $CED = CFD$.

N° 9. — SCOLIO. — Se coll'angolo $ADC = BDC$, fosse dato invece l'angolo $DCE = DCF$, — le due figure CDE, CDF, piegate l'una sull'altra, come innanzi, si copriranno pure; onde si avrà $DE = DF$, $CE = CF$, e l'angolo $CED = CFD$.

Si dirà pertanto:

Due oblique ugualmente inclinate alla perpendicolare, — sono da questa ugualmente distanti, uguali in lunghezza, ed ugualmente inclinate alla sottoposta.

TEOREMA IV.

N° 10. — *Se da un punto [C (fig. 4)] fuori di una retta [AB], sian condotte a questa una perpendicolare [CD], ed un' obliqua [CE], — la prima sarà sempre minore della seconda.*

Dal punto G, mezzo della distanza DE dei piedi della perpendicolare CD e dell' obliqua CE, si elevi sopra AB una perpendicolare indefinita: andrà questa a tagliare l' obliqua CE in qualche punto H; non v' essendo altra strada (n° 7) per uscir fuori dello spazio chiuso DEC: si unisca il punto H al punto D. Sarà $CD < CH + HD$; or (n° 8) $HD = HE$; dunque sarà $CD < CH + HE$, ossia $CD < CE$.

N° 11. — **Scolio I.** — Essendo l'angolo $GEH = GDH$ (n° 8), mentre $GDH < GDC$, ne segue $GEH < GDC$; ossia l'angolo $BEC <$ del retto ADC , cioè un angolo acuto; come al n° 5.

N° 12. — **Scolio II.** — *La perpendicolare condotta da un punto ad una retta, misura la vera distanza di quel punto a quella retta.*

Poichè per tale distanza si intende la più corta; e or questa è (n° 10) la perpendicolare condotta dal punto alla retta.

TEOREMA V.

N° 13. — *Se da un punto [C (fig. 5)] fuori di una retta [AB], sian condotte a questa una perpendicolare [CD], e differenti oblique [CE, CF, ...]; — quella d'esse [CF] che più si allontana dalla perpendicolare, sarà la più lunga, la più inclinata alla perpendicolare, e la meno inclinata alla sottoposta (*)*.

Dal punto G, mezzo della distanza EF dei piedi delle due oblique CE, e CF, si innalzi sopra AB una perpendicolare indefinita, che taglierà (n° 7) l'obliqua più distante CF in qualche punto H: si unisca il punto H al punto E. Sarà in ogni caso $CH + HE > CE$; ma (n° 8) $HE = HF$; dunque sarà $CH + HF > CE$; ossia $CF > CE$.

Se le due oblique CE e CF sono dalla stessa parte della perpendicolare CD, è evidente essere l'angolo $DCF > DCE$.

Siano esse da parti opposte della perpendicolare: da quella parte dove è CF, si segni un'altra obliqua CE uguale alla data CE [e cioè, con prendere (n° 8) $DE = CE$, e condurre CE]: si avrà l'angolo $DCF > DCE$ or costruito; ma questo (n° 8) è uguale al dato DCE; dunque sempre $DCF > DCE$.

(*) Per angolo d'inclinazione di ciascuna obliqua colla perpendicolare e colla sottoposta si intende sempre quello che ha l'apertura rivolta verso la sottoposta, e verso la perpendicolare, il quale è sempre un angolo acuto: inoltre si intende che l'inclinazione di due rette cresca o diminuisca, col crescere o diminuire del loro angolo acuto.

Essendo le due oblique CE e CF da parti opposte della perpendicolare CD, — il punto G cadrà fra F e D, nell'ipotesi fatta di $DF > DE$; onde la perpendicolare GH elevata sopra AB, sarà (n° 7) tutta al di quà della CD, per rapporto al punto F; e taglierà la CF in un punto H situato fra i punti C ed F. La retta EH sarà dunque compresa nell'angolo DEC; e si avrà l'angolo $GEH < DEC$. Ma (n° 8) l'angolo $GFH = GEH$; dunque sarà l'angolo $DFC < DEC$.

Se le oblique CE e CF fossero dalla stessa parte della perpendicolare CD, si ridurrà questo caso al precedente, — segnando dall'altra parte una nuova obliqua uguale ad una delle date; come innanzi si è fatto: e si conchiuderà sempre l'angolo $DFC < DEC$.

N° 14. — SCOLIO. — Se invece della condizione $DF > DE$, si avesse quest'altra, *angolo* $DCF > DCE$; questa condizione rinverrebbe a quella immediatamente, come è facil vedere: onde coll'ipotesi $DCF > DCE$, si avrebbe $DF > DE$; e quindi (n° 13) $CF > CE$, $CFD < CED$. Perciò si dirà:

Di due oblique disugualmente inclinate alla perpendicolare, la più inclinata ne è la più distante, la maggiore in lunghezza, e la meno inclinata alla sottoposta.

N° 15. — COROLLARIO I. — *Due oblique uguali [CE, CF (fig. 5)] sono ugualmente distanti dalla perpendicolare [CD], ugualmente inclinate a questa, ed ugualmente inclinate alla sottoposta [AB].*

Poichè se si avesse $DE >$, o $< DF$, si avrebbe (n° 13) $CE >$, o $< CF$; il che è contro l'ipotesi $CE = CF$: dunque essendo $DE = DF$, sarà (n° 8) l'angolo $DCE = DCF$, e l'angolo $CED = CFD$.

N° 16. — COROLLARIO II. — *Due oblique [CE, CF (fig. 5)] ugualmente inclinate alla sottoposta [AB], sono pure ugualmente inclinate alla perpendicolare [CD], ugualmente distanti da questa, ed uguali in lunghezza.*

Poichè se fosse l'angolo $DCE >$, o $< DCF$, sarebbe (n° 14) l'angolo $DEC <$, o $> DFC$; il che è contro l'ipotesi $DEC = DFC$: dunque essendo $DCE = DCF$, sarà (n° 9) $DE = DF$, $CE = CF$.

N° 17. — COROLLARIO III. — *Di due oblique disuguali [CE, CF (fig. 5)] la più lunga [CF] sarà la più distante dalla perpendicolare [CD], la più inclinata a questa, e la meno inclinata alla sottoposta [AB].*

Poichè se fosse $DF =$, o $< DE$, sarebbe (n° 8, 13) $CF =$, o $< CE$; il che è contro l'ipotesi $CF > CE$: dunque dovendo aversi $DF > DE$, sarà (n° 13) l'angolo $DCF > DCE$, e l'angolo $DFC < DEC$.

N° 18. — COROLLARIO IV. — *Di due oblique [CE, CF (fig. 5)], disugualmente inclinate alla sottoposta [AB] la meno inclinata [CF] sarà la più inclinata alla perpendicolare [CD], la più distante da questa, e la maggiore in lunghezza.*

Poichè se fosse l'angolo $DCF = , o < DCE$, sarebbe (n° 9, 14) l'angolo $DFC = , o > DEC$; il che è contro l'ipotesi $DFC < DEC$: dunque dovendo essere $DCF > DCE$, sarà (n° 14) $DF > DE$, $CF > CE$.

N° 19. — SCOLIO. — Le proprietà enunciate (n.° 15, 16, 17, 18), che riguardano la *lunghezza* delle oblique, e la loro *inclinazione sulla sottoposta*, sono vere ugualmente quando anche non si consideri la perpendicolare condotta pel punto comune di partenza sulla retta sottoposta; cioè a dire, che tali proprietà hanno sempre luogo della stessa maniera, sia che si considerino le oblique rapporto alla perpendicolare, o che si considerino fra loro. Così si dirà:

Due oblique uguali sono ugualmente inclinate sulla sottoposta; e viceversa due oblique ugualmente inclinate sulla sottoposta sono uguali.

Di due oblique disuguali la più lunga sarà la meno inclinata sulla sottoposta; e viceversa di due oblique disugualmente inclinate sulla sottoposta la meno inclinata sarà la più lunga.

Basterà infatti, per ridurre questi casi ai precedenti, di immaginar condotta la perpendicolare dal punto di partenza comune delle oblique sulla retta sottoposta.

N° 20. — COROLLARIO V. — *Da uno stesso punto, e da una stessa parte d'una perpendicolare ad una retta, non si possono mai condurre due oblique distinte uguali; — nè mai due oblique distinte ugualmente inclinate a quella retta.*

Poichè non confondendosi per ipotesi le due oblique, — l'una si scosterà più dell'altra dalla perpendicolare; onde essa sarà (n° 13) maggiore dell'altra; e meno inclinata alla sottoposta.

N° 21. — COROLLARIO VI. — *Da uno stesso punto fuori di una retta, non si possono mai condurre due oblique distinte uguali, che siano inclinate d'angoli acuti, nello stesso senso, sopra quella retta; — nè mai due oblique distinte ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra la stessa retta.*

Poichè abbassando da quel punto una perpendicolare sulla retta, questa perpendicolare riuscirebbe dalla stessa parte delle due oblique, e da quella parte dove esse fanno degli angoli acuti colla retta sottoposta (n° 6); onde si avrebbero o due oblique uguali, o due oblique ugualmente inclinate sulla sottoposta, condotte da uno stesso punto, e da una stessa parte della perpendicolare; il che è impossibile (n° 20).

Ciò dimostra pure, che:

Da uno stesso punto, fuori di una retta, non si possono mai condurre a questa tre oblique distinte uguali in lunghezza; — nè mai tre oblique distinte ugualmente inclinate alla medesima, quantunque anche inclinate in senso contrario l'una delle altre.

Poichè di queste si avrebbero almeno due od uguali fra loro, od ugualmente inclinate nello stesso senso sulla retta sottoposta, le quali sarebbero dalla stessa parte della perpendicolare condotta dal punto sulla retta; il che è impossibile.

N° 22. — COROLLARIO VII. — *Due rette ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una terza, non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza ambedue si immaginino prolungate.*

Poichè se si incontrassero in un punto comune, — si avrebbero da quello condotte due oblique distinte ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra la stessa retta; il che è impossibile (n° 21).

N° 23. — SCOLIO GENERALE. — Facile sarà ancora stabilire i seguenti *corollarii*, che altro non sono che modificazioni di alcune delle proposizioni precedenti.

1° — *Se pel mezzo d'una retta, si eleva a questa una perpendicolare indefinita, — ogni punto della perpendicolare sarà ugualmente distante dalle sue estremità (n° 8); — ed ogni punto fuori della perpendicolare, ne sarà disugualmente distante (n° 13, abbassando da quel punto un'altra perpendicolare sulla retta).*

2° — *Reciprocamente se un punto, fuori di una retta data, sia ugualmente distante dalle sue estremità, apparterrà esso alla perpendicolare elevata sul mezzo di quella retta (n° 15); — e se invece ne sia disugualmente distante, sarà fuori di questa perpendicolare (n° 17, abbassando... come sopra).*

Da ciò segue, che:

3° — *Se una retta ha due de' suoi punti ugualmente distanti dalle estremità di un'altra, sarà perpendicolare sulla metà di quest'altra:*

uno di questi punti potendo essere lo stesso punto di mezzo di quest'ultima retta.

Infine si osservi:

4° — *Se un punto è fuori della perpendicolare elevata sul mezzo d'una retta, sarà più distante da quella delle sue estremità, che è dall'altra parte della perpendicolare, da cui esso si trova.*



TEORIA

DEI TRIANGOLI UGUALI

N° 24. — La teoria delle perpendicolari e delle oblique, esposta qui innanzi, presenta non pochi vantaggi nello sviluppo delle altre teorie della geometria elementare; in grazia dei nuovi elementi, de' quali si è in essa introdotto la considerazione; ciò che ha fornito una serie ben ordinata di principii importanti, d'un uso continuo per il seguito. Vedasi l'applicazione di questi principii nella dimostrazione immediata di alcune proprietà speciali dei triangoli, e della loro teoria d'uguaglianza.

TEOREMA I.

N° 25. — *In ogni triangolo isoscele* $[ABC, (fig. 6)]$, *gli angoli* $[A, B]$ *opposti ai lati uguali* $[BC, AC]$,

sono uguali; — e reciprocamente se due angoli $[A, B]$ d'un triangolo $[ABC]$ sono uguali, i lati opposti $[BC, AC]$ saranno uguali, e il triangolo sarà isoscele.

Poichè essendo $BC = AC$, sarà (n° 19) $A = B$. Reciprocamente se $A = B$, sarà (n° 19) $BC = AC$.

N° 26. — SCOLIO. — *La perpendicolare $[CD]$ condotta dal vertice $[C]$ d'un triangolo isoscele $[ABC]$ sulla base $[AB]$, divide questa base, e l'angolo al vertice, in due parti uguali.*

Poichè con $AC = BC$, si ha (n° 15) $AD = BD$, ed angolo $ACD = BCD$.

TEOREMA II.

N° 27. — *In ogni triangolo $[ABC]$ (fig. 7), se due lati $[BC, AC]$ sono disuguali, gli angoli opposti $[A, B]$ lo sono pure, ed al lato maggiore $[AC]$ è opposto l'angolo maggiore $[B]$. Reciprocamente se due angoli $[A, B]$ d'un triangolo $[ABC]$ sono disuguali, i lati opposti $[BC, AC]$ lo sono parimente, ed all'angolo maggiore $[B]$ è opposto il lato maggiore $[AC]$.*

Poichè essendo $AC > BC$, sarà (n° 19) $B > A$. Reciprocamente se $B > A$, sarà (n° 19) $AC > BC$.

N° 28. — SCOLIO. — *Dal vertice $[C]$ d'un triangolo $[ABC]$, abbassando sulla base opposta $[AB]$ una perpendicolare $[CD]$, — se questa cade dentro*

del triangolo, dividerà la base, e l'angolo al vertice in due parti disuguali, tutte le volte che disuguali siano i lati che comprendono l'angolo al vertice.

Poichè se si abbia per es. $AC > BC$, si avrà (n° 17) $AD > BD$, ed angolo $ACD > BCD$.

Queste stesse disuguaglianze, si vede che hanno luogo parimente, quando la perpendicolare cade fuori del triangolo,

TEOREMA III.

N° 29. — La somma di due angoli $[A, B]$ d'un triangolo $[ABC]$ (fig. 7) è sempre minore di due angoli retti.

Dal vertice del terzo angolo C si abbassi sul lato opposto AB una perpendicolare CD : se questa cade dentro del triangolo, saranno A e B acuti (n° 5); se coincidesse con un lato, per es. col lato CB , sarebbe solo A acuto (n° 5), e B retto; se cade fuori del triangolo, sarà $A + B < CBD + B$ (n° 13), < 2 retti; onde sempre $A + B < 2$ retti. Così si avrà $A + C < 2$ retti, $B + C < 2$ retti.

N° 30. — COROLLARIO — L'angolo esterno $[CBE]$ di un triangolo $[ABC]$, che si ottiene prolungando un lato $[AB]$, è sempre maggiore di ciascuno degli angoli interni opposti $[A, C]$.

Infatti $B + A$, o. $B + C < 2$ retti; mentre $B + CBE = 2$ retti; dunque $CBE > A, > C$.

N° 31. — SCOLIO. — Un triangolo non può avere che un solo angolo ottuso, o un solo angolo retto; e non mai un retto e un ottuso ad un tempo.

N° 32. — La teoria dell'uguaglianza dei triangoli, consiste tutta nel dimostrare questo teorema generale:

Due triangoli sono uguali, quando hanno tre dei loro elementi uguali, ciascuno a ciascuno; purchè fra questi elementi, vi sia almeno un lato di ciascun triangolo.

Questo teorema generale presenta cinque casi distinti, che sono altrettanti teoremi, di cui si compone la presente teoria: essi sono i seguenti.

(1° Caso). TEOREMA IV.

N° 33. — *Due triangoli [ABC, A'B'C' (fig. 8)] sono uguali, quando hanno i tre lati uguali ciascuno a ciascuno [cioè $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$].*

Sovrapposti questi triangoli in modo che, coincidendo i lati uguali A'B' e AB, i vertici degli angoli opposti C' e C cadano dalla stessa parte di AB, — questi vertici, e i triangoli per conseguenza, coincideranno pure.

Infatti se non coincidessero, e che il triangolo A'B'C' sovrapposto così all'ABC, venisse a prendere la posizione segnata in *figura*; — conducendo la retta CC', e le rette Al e Bl dai punti A e B al suo punto di mezzo I, queste rette sarebbero ad un tempo perpen-

dicolari sul mezzo della retta CC' (n° 23, 3°); il che è impossibile (n° 3). Dunque i triangoli sovrapposti coincideranno esattamente, e si avrà $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$.

Altrimenti. Messi i triangoli ABC e $A'B'C'$ come nella *figura 9*, si conduca la retta CC' . Per $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, sarà AB perpendicolare sulla metà di CC' (n° 23, 3°); onde (n° 15) l'angolo $A=A'$, l'angolo $B=B'$, e (per gli angoli $ACI=A'C'I$, $BCI=B'C'I$) l'angolo $C=C'$.

N° 34. — SCOLIO. — Se con $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, non fosse BC uguale a $B'C'$, ma per es. $BC > B'C'$, i triangoli non sarebbero più uguali; e messi come nella *fig. 10*, AB non sarebbe più perpendicolare a CC' . Conducendo AE che lo sia, cadrà questa dalla parte di AB , da cui si trova il punto C , perchè $BC > B'C'$ (n° 23, 4°); onde essendo l'angolo $CAE=C'AE$ (n° 15), sarà l'angolo $A > A'$. Si dirà pertanto:

Se due triangoli hanno solo due lati uguali ciascuno a ciascuno, — dei due angoli opposti ai terzi lati disuguali, quello è il maggiore che è opposto al lato maggiore.

(2° Caso). TEOREMA V.

N° 35. — Due triangoli $[ABC, A'B'C'$ (*fig. 11*)] sono uguali, quando hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno [$AB=A'B'$, $AC=A'C'$], e l'angolo compreso uguale [$A=A'$].

Sovrapposti questi triangoli, in modo che coincidano insieme l'angolo uguale, e i lati uguali, — i terzi lati BC e $B'C'$, e perciò i triangoli, coincideranno pure; onde sarà $BC = B'C'$, $B = B'$, $C = C'$.

Altrimenti. Messi i triangoli come nella *fig. 9*, — per $AC = A'C'$, e $A = A'$, sarà AB (n° 15) perpendicolare sulla metà di CC' ; onde (n° 8) sarà $BC = B'C'$, $B = B'$, e $C = C'$.

N° 36. — SCOLIO. — Se con $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, fosse $A > A'$, i triangoli sarebbero disuguali, e si avrebbe $BC > B'C'$.

Infatti messi i triangoli come nella *fig. 10*, — la retta AE , che divida in due parti uguali l'angolo CAC' ($= A + A'$) cadrà nell'angolo maggiore A , e sarà (n° 13) perpendicolare sulla metà di CC' ; onde (n° 25, 4°) sarà $BC > B'C'$.

Si può questo dimostrare direttamente, unendo il punto C col punto I d'incontro di AE con BC ; poichè, piegando il triangolo CAI sul triangolo $C'AI$, si proverebbe $CI = C'I$; onde $B'C' < BI + C'I, < BI + IC, < BC$ (*). Si dirà pertanto:

Se due triangoli hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno, e l'angolo compreso disuguale, — dei terzi lati, quello sarà il maggiore, che è opposto all'angolo compreso maggiore.

(*) Si avrebbe pure la stessa dimostrazione, sovrapponendo un triangolo all'altro, per la coincidenza dei lati uguali $A'B'$ e AB , e conducendo sempre la bisettrice AE dell'angolo CAC' ($= A - A'$).

(3° Caso). TEOREMA VI.

N° 37. — *Due triangoli* $[ABC, A'B'C'$ (*fig. 12*)] *sono uguali, quando hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno* $[AC = A'C', BC = B'C']$, *e uno degli angoli opposti uguale* $[A = A']$; *purchè gli altri angoli opposti* $[B, B']$ *siano della stessa specie* (*).

Fa d'uopo dimostrare anzi tutto come gli angoli B e B' possono essere di specie differente.

Gli angoli uguali A e A' essendo opposti ai lati uguali BC e $B'C'$, supponiamo dapprima che sieno questi maggiori degli altri lati uguali AC e $A'C'$, a cui sono opposti gli angoli B e B' . Per $BC > AC$, $B'C' > A'C'$, saranno in ciascun triangolo $A > B$, $A' > B'$ (n° 27). Or se A e A' siano acuti, B e B' , minori di essi, saranno pure acuti, e perciò della stessa specie: se A e A' siano ottusi, o retti, B e B' saranno acuti, pel n° 31, e perciò pure della stessa specie; onde in questo caso, che gli angoli uguali A e A' sieno opposti ai lati uguali maggiori, gli altri angoli opposti B e B' saranno sempre acuti, e perciò della stessa specie.

Supponiamo invece che siano $AC > BC$, $A'C' > B'C'$: saranno (n° 27) $B > A$, $B' > A'$: questi ultimi A e A' saranno dunque in tal caso acuti (n° 31); ma allora i primi B e B' potranno essere o acuti ambedue, e maggiori di A e A' ; ovvero ambedue ottusi; ovvero anche

(*) Questo caso dell'uguaglianza dei triangoli, che non si considera comunemente in geometria, e solo si avverte a modo di problema, merita invece tutta l'attenzione dei principianti: oltre a che esso importa bene avvertirsi in trigonometria.

un ottuso, e l'altro acuto (*fig. 13*) (*). Or è manifesto che in quest'ultimo caso degli angoli B e B' di specie differente, i triangoli ABC e $A'B'C'$ (*fig. 13*) non potranno mai essere uguali: resta a vedersi se essi lo siano nell'ipotesi contraria, che gli angoli B e B' siano invece della stessa specie (*fig. 12*).

Si sovrapponga il triangolo $A'B'C'$ all' ABC in modo, che coincidano l'angolo A' col suo uguale A , e il lato contiguo $A'C'$ col suo uguale AC : gli altri lati uguali BC e $B'C'$ coincideranno pure in un solo; poichè se non coincidessero, — si avrebbero dallo stesso punto C condotte due oblique uguali CB e CB' , inclinate d'angoli acuti, nello stesso senso, sopra la direzione AB (comune ai terzi lati AB e $A'B'$); il che è impossibile (*n° 21*). Dunque i due triangoli coincideranno esattamente; e si avrà $AB = A'B'$, $B = B'$, $C = C'$.

Altrimenti. Messi i triangoli come nella *figura 14*, si conduca la retta AA' : per $AC = A'C'$ sarà (*n° 19*) *ang.* $CAI = CA'I$; onde, per l'ipotesi $A = A'$, sarà pure *ang.* $BAI = BA'I$; e per conseguenza (*n° 19*) $AB = A'B'$. La retta BC sarà dunque perpendicolare sulla metà di AA' (*n° 23, 3°*); onde (*n° 15*) $B = B'$, $C = C'$.

N° 38. — SCOLIO I. — Nell'ipotesi degli angoli B e B' di differente specie (*fig. 13*), — sovrapposto un triangolo $A'B'C'$ all'altro ABC , per la coincidenza degli an-

(*) Se un degli angoli B e B' fosse retto, l'altro lo sarebbe pure, come si proverà tosto: ma allora essendo essi uguali, si sarebbe nel primo caso avvertito; con di più, che ambe gli angoli opposti ai lati uguali, sarebbero uguali ciascuno a ciascuno.

goli uguali A' e A , e dei lati contigui uguali $A'C'$ e AC , — per $BC = B'C'$, si avrà (n° 19) l'angolo $CBB' = CB'B$; onde sarà la somma $B + B' = 2$ retti; e perciò l'uno d'essi angoli B e B' supplemento dell'altro. Si dirà pertanto:

Due triangoli avendo due lati uguali ciascuno a ciascuno, e un degli angoli opposti uguale; — se gli altri angoli opposti non sono uguali, saranno essi sempre supplementari fra loro; — e saranno uguali o supplementari, secondo che siano della stessa specie, o di specie differente.

N° 39. — SCOLIO II. — Reciprocamente se due triangoli $[ABC, A'B'C' \text{ (fig. 13)}]$ abbiano due lati uguali $[AC = A'C', BC = B'C']$, e un degli angoli opposti in un triangolo, supplemento del suo corrispondente nell' altro triangolo $[B = 2 \text{ retti} - B']$; — gli altri angoli opposti $[A \text{ e } A']$ saranno uguali fra loro.

Dapprima questi angoli saranno della stessa specie, e necessariamente acuti: poichè, per l'ipotesi di $B + B' = 2$ retti, l'un di questi ultimi, B' per es. sarà ottuso; onde nel triangolo $A'B'C'$, l'altro A' sarà acuto (n° 31); e si avrà (n° 27) $A'C' > B'C'$. Ma essendo $AC = A'C'$, e $BC = B'C'$, sarà così pure $AC > BC$; e per conseguenza l'angolo $B > A$ (n° 27): ma B' essendo ottuso, B suo supplemento sarà acuto; dunque $A < B$ sarà pure acuto. I due angoli A e A' son dunque ambedue acuti, e così della stessa specie.

Ora se nel triangolo ABC si conduce l'obliqua $CB' = CB$, — il triangolo $AB'C$ sarà uguale all' $A'B'C'$

(n° 37); essendo $AC = A'C$, $B'C = BC = B'C'$, l'angolo $AB'C = 2 \text{ retti} - CB'B = 2 \text{ retti} - B = B'$, ed inoltre gli angoli A e A' della stessa specie: dunque sarà $A = A'$.

Altrimenti. Messi i triangoli ABC e $A'B'C'$ l'uno accanto all'altro, come nella *fig. 15*; — per gli angoli supplementari adiacenti B e B' , i lati AB e $A'B'$ riusciranno in linea retta AA' ; onde, essendo $AC = A'C$, sarà (n° 19) $A = A'$.

(4° Caso). TEOREMA VII.

N° 40. — *Due triangoli* [ABC , $A'B'C'$ (*fig. 11*)] *sono uguali, quando hanno un lato uguale* [$AB = A'B'$] *adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno* [$A = A'$, $B = B'$].

Sovrapponendo l'un d'essi triangoli all'altro, in modo che coincidano il lato uguale, e gli angoli adiacenti uguali, — i vertici degli angoli opposti al lato comune, e perciò i triangoli stessi, coincideranno esattamente; e si avrà $AC = A'C$, $BC = B'C$, $C = C'$.

(5° Caso). TEOREMA VIII.

N° 41. — *Due triangoli* [ABC , $A'B'C'$ (*fig. 12*)] *sono uguali, quando hanno un lato uguale* [$AC = A'C$], *e due angoli, uno adiacente, e l'altro opposto, uguali ciascuno a ciascuno* [$A = A'$, $B = B'$].

Si sovrapponga il triangolo $A'B'C'$ all' ABC , in modo che coincidano il lato $A'C'$ col suo uguale AC , e l'angolo A' col suo uguale A : i lati $B'C'$ e BC coincideranno pure, a motivo di $B' = B$; poichè se non coincidessero, — si avrebbero così dallo stesso punto C condotte due oblique CB e CB' ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra la direzione AB (comune ai terzi lati AB e $A'B'$); il che è impossibile (n° 21). Dunque i due triangoli coincideranno esattamente, e si avrà $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $C = C'$.

N° 42. — COROLLARIO. — *Se due triangoli [ABC , $A'B'C'$ (fig. 13)] abbiano un angolo uguale [$A = A'$], un altro supplementare [$B = 2$ retti — B'], ed uno dei lati opposti uguale [$BC = B'C'$, ovv. $AC = A'C'$]; gli altri lati opposti di ciascun triangolo [AC e $A'C'$, ovv. BC e $B'C'$] saranno pure uguali fra loro (*).*

Nel triangolo ABC si conduca l'obliqua $CB' = CB$: i triangoli $AB'C$ ed $A'B'C'$ saranno uguali (n° 41), avendo il lato $B'C = BC = B'C'$, ovv. il lato $AC = A'C'$, l'angolo $A = A'$, e l'angolo $AB'C = 2$ retti — $CB'B = 2$ retti — $B = B'$; onde sarà in un caso $AC = A'C'$; e nell'altro caso $B'C = B'C' = BC$.

Il primo di questi casi, in cui siano uguali i lati BC e $B'C'$ opposti agli angoli uguali A e A' , si può pure dimostrare come segue.

(*) Questo è il principio citato nella nota alla pagina 35 della mia Memoria sui triangoli simili; e di cui si è fatto molto uso in tale Memoria (n° 29).

Messi i triangoli come nella *fig. 15*, — per esser $B + B' = 2$ retti, ABA' sarà una linea retta; onde, essendo $A = A'$, sarà (n° 19) $AC = A'C'$.

N° 43. — SCOLIO GENERALE. — Nei teoremi precedenti si son sempre considerati i triangoli di genere qualunque rapporto ai lati, e rapporto agli angoli. Rapporto ai lati, vi sarebbero di speciali i triangoli isosceli, sui quali non occorre fermarsi, dopo il n° 23 (*): rapporto agli angoli, vi sarebbero di speciali i triangoli rettangoli, sull'eguaglianza dei quali gli autori di trattati di Geometria stabiliscono comunemente due teoremi particolari, che son compresi nei teoremi VI, e VIII sopra dimostrati. Gli enunciati particolari di questi teoremi sono i seguenti, che, come si vedrà, son compresi in quelli dei numeri 37 e 41:

Due triangoli rettangoli sono uguali — 1° — quando hanno l'ipotenusa uguale, e un cateto uguale; — 2° — quando hanno l'ipotenusa uguale, e un angolo acuto uguale.

(*) Rispetto al triangoli isosceli vi sarebbe però questo caso particolare, che sfugge al generali precedenti:

Due triangoli isosceli sono uguali, quando hanno la base uguale, e l'angolo al vertice uguale.

Questo non rientra direttamente in alcuno dei casi precedenti; ma si giungerà a dimostrarlo, con scomporre ciascun triangolo in due altri uguali fra loro, mediante una perpendicolare abbassata da ciascun vertice, sulla base opposta; i quali triangoli parziali saranno uguali nell'uno e nell'altro dei proposti, in virtù del n° 41; onde questi ultimi avranno pure gli altri lati, e gli angoli opposti tutti uguali fra loro.

Un'osservazione generale, da farsi in tutti i casi dell'uguaglianza di due triangoli, si è che

In due triangoli uguali, ai lati uguali sono sempre opposti angoli uguali; e viceversa ad angoli uguali sono sempre opposti lati uguali.

Nulla più resterebbe, a completare la teoria dei triangoli uguali, se non il dar ragione della condizione espressa nell'enunciato del teorema generale, che ne forma l'oggetto (n° 32): ma questo è ciò che non si può fare, fino a che non siasi dimostrato il teorema fondamentale sulla *somma dei tre angoli d'un triangolo*; a stabilire il quale d'una conveniente e facile maniera, saria necessario conoscere la teoria delle parallele; che non si suppone per ora ancor dimostrata. Si ritornerà sopra tale questione, nel seguito di questa Memoria.



TEORIA

DELLE PARALLELE

N° 44. — *Due rette situate nello stesso piano sono dette parallele, quando non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza ambedue si immaginino prolungate.*

Tali sono adunque *due rette perpendicolari a una terza (n° 7)*; e in generale *due rette ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una terza (n.° 22).*

N° 45. — Questo risultato generale, che conferma e dimostra l'esistenza delle parallele in un piano, costituisce un primo teorema della loro teoria; il quale si enuncierà pertanto dicendo:

TEOREMA I.

Due rette ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una terza, sono parallele (n° 22).

N° 46. — SCOLIO. — Di qui la possibilità e il modo di condurre, per un punto dato, una parallela ad una retta data; poichè basterà di far risultare questa, e la retta a condursi, ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una terza retta, segnata ad arbitrio, che passi però pel punto dato.

LEMMA FONDAMENTALE

N° 47. — *Per un punto, fuori di una retta, non si può condurre che una sola parallela a questa retta.*

Già si è veduto potersene condurre una (n.° 46); resta a provarsi non potersene condurre che una sola.

Si supponga che pel punto C, fuori della retta AB (fig. 16), si possano condurre ad AB due parallele distinte D'D, E'E. Per un punto I d'una di queste, E'E per es., — e preso sulla parte CE; che è al di là di D'D, per rapporto ad AB, — si conduca all'altra D'D una nuova parallela H'H: sarà questa pure parallela ad AB; poichè non potrebbe evidentemente H'H andare a incontrare AB, senza che prima giungesse a tagliare in qualche punto la sua parallela D'D.

Supponendo tutte queste rette parallele prolungate indefinitamente in ambi i sensi, separano esse, da tutto il resto del piano indefinito, degli spazii pure indefiniti in ambi i sensi, che indicherò per $AB-D'D$, per $AB-E'E$, per $AB-H'H$, per $D'D-H'H$, rispettivamente quelli separati, da tutto il resto del piano, dalle parallele indefinite AB e $D'D$, AB ed $E'E$, AB ed $H'H$, $D'D$ ed $H'H$.

Or gli spazii indefiniti $AB-D'D$, e $AB-E'E$ sono equivalenti fra loro; componendosi dello spazio comune indefinito $AB-E'CD$, e degli spazii angolari uguali $E'CD'$ ed ECD . Parimente gli spazii indefiniti $AB-E'E$ ed $AB-H'H$ sono fra loro equivalenti; componendosi dello spazio comune indefinito $AB-E'IH$, e degli spazii angolari uguali $E'IH'$ ed EIH : dunque gli spazii indefiniti $AB-D'D$, e $AB-H'H$ saranno equivalenti fra loro, essendolo al medesimo spazio indefinito $AB-E'E$. Ma ciò è evidentemente impossibile; poichè le rette AB , $D'D$, $H'H$ essendo fra loro parallele, lo spazio indefinito $AB-D'D$ è sempre minore dello spazio indefinito $AB-H'H$, il quale lo supera dello spazio pure indefinito $D'D-H'H$: dunque è parimente impossibile che, pel punto C , si possa mai condurre più d'una sola parallela ad AB .

N° 48. — COROLLARIO. — *Due rette parallele a una terza, sono parallele fra loro.*

Poichè se si incontrassero in un punto comune, — si avrebbero da quello condotte due parallele distinte alla stessa retta; il che è impossibile (n° 47).

Scolio. — È da osservarsi come questa proposizione ha di mira particolarmente il caso, in cui le due rette sono dalla stessa parte della parallela comune: poichè se sia questa ad esse intermedia, la proposizione sarebbe manifesta; non potendo evidentemente le due rette andare a incontrarsi, senza che alcuna d'esse giunga prima a tagliare in qualche punto la parallela comune; il che è contro l'ipotesi. Si è ben valso adunque di questo caso particolare, nella dimostrazione del *lemma* precedente, senza che perciò vi sia circolo vizioso.

TEOREMA II.

N° 49. — *Reciprocamente se due rette, situate nello stesso piano, sono parallele, — riusciranno sempre ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una terza, condotta comunque a traverso delle medesime.*

Poichè se ciò non fosse, — si potrebbe, pel punto d'intersezione d'una delle proposte parallele colla terza retta, condurre una nuova retta, che fosse su questa ugualmente inclinata, nello stesso senso, che l'altra proposta parallela; la quale nuova retta sarebbe così parallela a quest'ultima (n° 45); onde si avrebbero, per lo stesso punto, condotte due parallele distinte ad una stessa retta; il che è impossibile (n° 47). Dunque ecc.

Scolio. — Questa proprietà fondamentale è inoltre esclusiva alle parallele; come si dimostra nel teorema seguente.

TEOREMA III.

N° 50. — *Due rette che concorrono in un punto comune, sono sempre disugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra d'una terza, condotta comunque a traverso delle medesime.*

Poichè se ciò non fosse, — si avrebbero allora due oblique condotte per uno stesso punto, ed ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una stessa retta; il che è impossibile (n° 21). Dunque ecc.

TEOREMA IV.

N° 51. — *Reciprocamente se due rette, situate nello stesso piano, siano disugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra di una terza, desse prolungate a sufficienza si incontreranno sempre in un punto comune.*

Poichè se non si incontrassero, e che fossero parallele, — dovrebbero allora essere ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra quella terza retta (n° 49); il che è contro l'ipotesi. Dunque ecc.

Altrimenti. Se pel punto d'intersezione d'una delle rette proposte colla terza retta, si conduce una nuova retta, che sia su questa terza ugualmente inclinata, nello stesso senso, che l'altra retta proposta, — la nuova retta condotta sarà parallela a quest'ultima (n° 45); onde la prima proposta non le potrà mai essere parallela (n° 47); e prolungate entrambe a sufficienza, dovranno incontrarsi.

N° 52. — Quando due rette AB e CD (*fig. 17*), situate nello stesso piano, sono tagliate da una terza EF , condotta comunque a traverso delle medesime, — questa retta EF prende il nome di *secante*; e gli otto angoli, che hanno luogo intorno ai due punti d'intersezione G ed H , considerati due a due, — *non mai adiacenti fra loro, nè opposti al vertice*, — prendono le seguenti denominazioni:

1° — Si chiamano *angoli corrispondenti* quelli situati da una stessa parte della secante, coll'apertura rivolta nello stesso senso: essi sono in *figura* gli angoli BGF e DHF , BGE e DHE , AGF e CHF , AGE e CHE .

(*Questi sono gli angoli, secondo i quali, le rette AB e CD si dicono inclinate, nello stesso senso, sulla terza EF*).

2° — Si chiamano *angoli alterni interni* quelli situati da parti opposte della secante, coll'apertura rivolta verso ciascuna delle rette date: essi sono gli angoli BGH e CHG , AGH e DHG .

3° — Si chiamano *angoli alterni esterni* quelli situati da parti opposte della secante, coll'apertura rivolta verso nessuna delle rette date: essi sono gli angoli BGE e CHF , AGE e DHF .

4° — Si chiamano *angoli interni da una stessa parte* quelli che, avendo l'apertura rivolta verso ciascuna delle rette date, sono situati dalla stessa parte della secante: essi sono gli angoli BGH e DHG , AGH e CHG .

5° — Si chiamano *angoli esterni da una stessa parte* quelli che, avendo l'apertura rivolta verso nessuna delle rette date, sono situati dalla stessa

parte della secante: essi sono gli angoli BGE e DHF, AGE e CHF.

Per la considerazione di tutti questi angoli, si sogliono presentare comunemente sotto altro aspetto i quattro teoremi innanzi stabiliti; ne' quali consiste tutto l'essenziale della teoria delle parallele: onde ai medesimi si sostituiranno ora i quattro seguenti, che rinvencono pure a quelli nella sostanza.

TEOREMA I *bis*.

N° 53. — *Se due rette sono talmente situate nello stesso piano, che tagliate da una terza, — gli angoli corrispondenti, — ovvero gli angoli alterni interni, — ovvero gli angoli alterni esterni, sieno uguali; — ovvero gli angoli interni da una stessa parte, — ovvero gli angoli esterni da una stessa parte, sieno supplementari; — queste rette saranno sempre fra loro parallele.*

Infatti è facil vedere come ciascuno dei quattro ultimi casi rinvenga al primo — *degli angoli corrispondenti uguali*; — ed or questo è quello appunto contemplato nel teorema I (n° 45): onde essendo le due rette parallele in questo caso, saranno pure parallele in tutti gli altri.

TEOREMA II *bis*.

N° 54. — *Reciprocamente se due rette, situate nello stesso piano, sono parallele, — desse tagliate da una*

terza, — gli angoli corrispondenti, — gli angoli alterni interni, — gli angoli alterni esterni, saranno uguali; e — gli angoli interni da una stessa parte, — gli angoli esterni da una stessa parte, saranno supplementari.

Infatti avendo luogo la prima di queste proprietà, in virtù del teorema II (n° 49), è facile vedere come ne vengano di conseguenza tutte le altre enunciate.

N° 55. — SCOLIO I. — Questa proposizione rinvieni a dire altrimenti, che:

Quando due rette parallele sono tagliate da una terza, — degli otto angoli, che han luogo attorno ai due punti di intersezione, quelli d'una medesima specie (i quattro acuti, o i quattro ottusi) sono tutti uguali fra loro; e quelli di specie differente sono a due a due supplementari.

N° 56. — SCOLIO II. — Se uno di questi otto angoli sia retto, tutti gli altri lo sono pure; e la secante risulta perpendicolare comune alle due parallele. Quindi si dirà:

Se due rette sono parallele, qualunque perpendicolare ad una di esse, è pure perpendicolare all'altra.

N° 57. — SCOLIO III. — *La perpendicolare comune a due parallele, compresa fra esse, misura la vera loro distanza in quei punti.*

Poichè per tale distanza si intende la più corta da una all'altra in quei punti; e questa è (n° 12) la per-

pendicolare condotta dal punto di una all' altra parallela; la quale riesce pure perpendicolare alla prima.

TEOREMA III bis.

N° 58. — *Quando due rette concorrono in un punto comune, tagliate da una terza, — gli angoli corrispondenti, — gli angoli alterni interni, — gli angoli alterni esterni, sono disuguali; e — gli angoli interni da una stessa parte, — gli angoli esterni da una stessa parte, non sono supplementari.*

E invero avendo luogo la prima di queste proprietà, in virtù del teorema III (n° 50), tutte le altre ne son di conseguenza.

TEOREMA IV bis.

N° 59. — *Reciprocamente se due rette siano in modo situate nello stesso piano, che tagliate da una terza, — gli angoli corrispondenti, — ovvero gli angoli alterni interni, — ovvero gli angoli alterni esterni, sieno disuguali; — ovvero gli angoli interni da una stessa parte, — ovvero gli angoli esterni da una stessa parte, non sieno supplementari, — queste rette, prolungate a sufficienza, si incontreranno sempre in un punto comune.*

Infatti esse incontrandosi nel primo di questi casi, in virtù del teorema IV (n° 51), si incontreranno pure in tutti gli altri; che, com' è facil vedere, rinviengono immediatamente al primo.

N° 60. — SCOLIO. — La somma di due angoli non supplementari, potendo essere maggiore o minore di due retti, — si vedrà facilmente, come succederà sempre l'incontro delle due rette in questione da quella parte della secante, da cui la *somma degli angoli interni da una stessa parte* sarà minore di due retti; ovvero la *somma degli angoli esterni da una stessa parte* sarà maggiore di due retti.

TEOREMA V.

N° 61. — *Due rette parallele sono dappertutto ugualmente distanti.*

Siano AB e CD (*fig. 18*) due rette parallele: da due punti E ed F, presi ad arbitrio sull'una di esse CD, si abbassino sull'altra AB le perpendicolari EG, FH: saranno queste pure perpendicolari a CD (n° 56); e misureranno la distanza della CD all'AB, nei punti E ed F (n° 57); come pure la distanza dell'AB alla CD, nei punti G ed H: si tratta di provare che $EG = FH$.

Dal punto I, mezzo di GH, si conduca IK perpendicolare comune ad AB e CD; e si pieghi la figura KIGE sulla figura KIHf: tutti gli angoli essendo retti, coprirà l'una esattamente l'altra; onde si avrà $GE = HF$.

N° 62. — SCOLIO. — La reciproca di questa proposizione è evidente; poichè *due rette, che fossero dappertutto ugualmente distanti, non potrebbero mai incontrarsi, e sarebbero parallele.*

Inoltre questa proprietà è esclusiva alle parallele; poichè *due rette concorrenti in un punto comune, sono dappertutto disugualmente distanti*; e reciprocamente *se due rette sono dappertutto disugualmente distanti, esse prolungate a sufficienza, si incontreranno.*

TEOREMA VI.

N° 63. — *Le parti di rette parallele [AC e BD, ovv. AB e CD (fig. 19)], comprese fra parallele [AB e CD, ovv. AC e BD], sono uguali fra loro.*

Pel punto D si conduca la retta EDF, che faccia l'angolo $CDE = (n^{\circ} 54) AFE = DCE = BAE = FBD$: sarà (n° 19) $EC = ED$; $EA = EF$; $DB = DF$; onde $CA = DF = DB$, ossia $AC = BD$.

Parimente conducendo la retta GDH, che faccia l'angolo $BDG = AHG = DBG = HAG = HCD$, si avrà $GB = GD$; $GA = GH$; $DC = DH$; onde $BA = DH = DC$, ossia $AB = CD$.

N° 64. — **COROLLARIO I.** — *Le parti di rette parallele [AB, CD (fig. 20)], comprese fra rette inclinate [AC, BD], — che si taglino fuori delle prime, — sono disuguali: così è delle rette inclinate [AC, BD], comprese fra parallele [AB, CD], — che si trovino dalla stessa parte del punto di concorso di quelle; — a meno che le prime non sieno ugualmente inclinate, in senso opposto, sopra ciascuna parallela; nel qual caso saranno uguali.*

Pel punto C si conduca CE parallela a DB: sarà (n° 63) $EB = CD$; onde $AB > CD$.

Se l'angolo CAB sia $< DBA$, o $< DBF$, sarà (n° 54) l'angolo CAE $< CEA$, o $< CEF$; onde (n° 19) $CA > CE$. Ma (n° 63) $CE = DB$; dunque $CA > DB$.

Se sia invece l'angolo $CAB = DBA =$ (n° 54) CEA , sarà $CA =$ (n° 19) $CE = DB$.

N° 65. — COROLLARIO II. — *Le parti di rette inclinate [AC e BD, ovv. AB e CD (fig. 21)], comprese fra rette inclinate [AB e CD, ovv. AC e BD], — che non si tagliano le une fra le altre, — possono essere uguali, o disuguali: ma se due opposte [AC e BD] siano uguali, le altre opposte [AB e CD] saranno disuguali.*

La prima parte della proposizione essendo manifesta, dimostriamo la seconda.

Pei punti B, e C, si conducano le rette BE parallela ad AC, CE parallela ad AB, che si incontrino in E: si avrà (n° 63) $BE = AC = BD$ per ipotesi, e $CE = AB$. Si conduca DE, e si unisca il suo mezzo I col punto B: per $BE = BD$, sarà (n° 23) BI perpendicolare sul mezzo di DE; onde il punto C, che è fuori di questa perpendicolare, sarà disugualmente distante da E e D; e si avrà in figura $CE > CD$ (n° 25, 4'). Ma $CE = AB$; dunque infine $AB > CD$.

N° 66. — COROLLARIO III. — *Se di quattro rette [AB, AC, BD, CD (fig. 22)], che si tagliano in quattro punti distinti, le parti opposte [AB e CD, AC e BD] sieno uguali, queste rette saranno parallele.*

(Questa proposizione è la *reciproca* di quella dimostrata al n° 63).

Infatti se AB e CD fossero fra loro inclinate; ad un tempo che AC e BD , — o che solo le une siano inclinate, e le altre nò, — allora le rette inclinate o parallele AB e CD , comprese fra le rette inclinate uguali AC e BD , dovrebbero essere disuguali (n° 63, 64); contro l'ipotesi fatta che sieno uguali. Parimente le rette inclinate o parallele AC e BD , comprese le rette inclinate uguali AB e CD , dovrebbero essere disuguali (n° 63, 64); contro l'ipotesi, che siano uguali: onde per una parte le rette uguali AC e BD , e per l'altra le rette uguali AB e CD , non possono mancare di essere ad un tempo fra loro parallele.

Ma si può dimostrare la proposizione direttamente, come segue:

Pei punti B , e C , si conducano due parallele ad AC , e ad AB , le quali si supponga che si incontrino in E : si unisca DE , ed il suo mezzo I ai punti B e C . Si avrebbe (n° 65) $CE = AB = CD$, $BE = AC = BD$; onde le rette BI e CI sarebbero (n° 25) due perpendicolari distinte sul mezzo di DE ; il che è impossibile: dunque le parallele condotte non potranno incontrarsi in un punto E diverso dal punto D ; e perciò esse si confonderanno rispettivamente con BD , e con CD ; ossia che queste rette saranno parallele ad AC , e ad AB .

N° 67. — COROLLARIO IV. — *Se di quattro rette [AB , AC , BD , CD], che si tagliano in quattro punti distinti, — due opposte [AC e BD] sieno uguali e parallele;*

le altre due opposte [AB e CD] saranno pure uguali e parallele.

Infatti dapprima le rette AB e CD non possono essere inclinate; poichè allora le parti di parallele AC e BD comprese fra esse, sarebbero disuguali (64); contro l' ipotesi: dunque, dovendo AB e CD essere parallele, esse saranno poi uguali fra loro, pel n° 63.

N° 68. — COROLLARIO V. — *Due rette [AB, CD (fig. 23)] essendo uguali e parallele, — se si uniscano le loro estremità opposte per due altre rette [AD, BC], queste si taglieranno scambievolmente ciascuna in due parti uguali.*

Pel punto I di loro intersezione, si conduca la retta IE uguale e parallela ad AB, e CD; e si unisca il punto E ai punti B e D. Sarà (n° 67) BE uguale e parallela ad AI; e DE uguale e parallela a CI. D'altronde per essere pure BE e ID, DE e IB fra loro parallele, si ha (n° 63) $BE=ID$, $DE=IB$; dunque sarà $AI=ID$; $BI=IC$.

N° 69. — COROLLARIO VI. — *Reciprocamente se due rette [AD e BC] si tagliano ciascuna in due parti uguali, — le rette [AB e CD], che uniscono le loro estremità, saranno uguali e parallele.*

Pei punti B, e D, si conduca BE parallela ad AD, e DE parallela a BC, che si incontreranno in E; e si unisca IE. Si avrà (n° 63) $BE=ID=AI$, $DE=IB=CI$: onde, pel n° 67, sarà IE uguale e parallela ad AB, ed uguale e parallela a CD; per cui AB e CD saranno uguali e parallele fra loro.

N° 70. — SCOLIO. — Se le rette AD e BC (*fig. 24*) sono uguali, — conducendo ancora le rette AC e BD , queste risulteranno perpendicolari sulle prime AB e CD . Infatti avendosi allora l'angolo $CDI = (n° 54) IAB = (n° 19) IBA$, e l'angolo $IDB = IBD$, sarà l'angolo $CDB = ABD$; onde ciascun di questi angoli sarà *retto*; poichè dessi sono fra loro supplementari ($n° 54$). Lo stesso si proverà per AC .

N° 71. — SCOLIO GENERALE. — Nei teoremi precedenti, si contiene quanto è di più interessante nella teoria delle parallele; ai quali ciò non ostante si dovranno aggiungere quelle altre proposizioni, che stabiliscono l'uguaglianza di due angoli in un piano, dipendentemente dalla posizione relativa dei loro lati; di avere cioè questi lati paralleli, od ugualmente inclinati fra loro, od ugualmente inclinati sopra una stessa retta, e diretti nello stesso senso, o in senso contrario: come pure le *reciproche* di queste proposizioni; le quali tutte si proveranno per le proprietà dimostrate delle parallele ($n° 54$).

Egli è ben da osservarsi, come tutto l'essenziale di questa teoria si riduca in fondo ai primi quattro teoremi stabiliti ($n° 45, 49, 50, 51$); deducendosi dai medesimi, come immediate conseguenze, tutte le altre proposizioni, che più importa di dimostrare: onde i medesimi si dovranno considerare come quattro teoremi essenziali della teoria delle parallele. Inoltre pur fra questi, quello che più importa di stabilire, si è il teorema II, o II *bis* ($n° 49, 54$); siccome quello appunto,

che mette in luce le proprietà di cui godono le rette parallele; considerate rapporto a una secante: onde l'oggetto della sua dimostrazione, dovrà essere sempre il principale della teoria di queste linee.

Queste considerazioni, congiunte ad alcune altre, che mi occorre di fare, nello studio di questa teoria fondamentale della Geometria, e che indicherò quì appresso, sono quelle, che mi han fatto concepire l'idea della precedente.



RIFLESSIONI

SULLA

TEORIA DELLE PARALLELE

I. — L'oggetto principale di questa teoria essendo quello di dimostrare le proprietà, di cui godono le rette parallele, rapporto a una secante condotta comunque a traverso delle medesime; — esso si riduce a *stabilire il teorema II, o II bis*, sopra enunciato (n° 49, 54): si è nella dimostrazione di questo teorema, che consiste adunque tutta la difficoltà della teoria delle parallele, che in ogni tempo ha occupato la mente dei geometri.

Difficilissimo essendo il dimostrare direttamente questo teorema, si è cercato dai geometri a traspor-

tarne la difficoltà (e solo così si giunse a superarla, in modo più o meno esatto); riducendola ad altri punti, donde più di leggieri se ne potesse uscir con vantaggio: si è di tal modo, che EUCLIDE ne trasportò la difficoltà; riducendola alle condizioni, per cui due rette, situate nello stesso piano, devono incontrarsi (n° 51, o 59); ciò che però Egli non dimostrò; ma richiese gli fosse concesso, formandone un *postulato* di geometria: si è di tal modo che si è ridotta qui innanzi (n° 47) la difficoltà alla dimostrazione diretta del teorema: — *per un punto fuori di una retta non si può condurre che una sola parallela a questa retta*; — il qual teorema si è posto a modo di *lemma*, a riguardo del teorema II a dimostrarsi: e si è infine di tal modo, che altri geometri, posteriori ad EUCLIDE, cercarono pure a trasportare la difficoltà, in varie maniere; *sebben fecero i più degli inutili sforzi per superarla*, come dice LACROIX (Elem. di Geom., nota citata al n° 40); *essendo pressochè tutti caduti in assai grandi lunghezze, o nell'inconveniente di complicare, per dei ragionamenti oscuri, delle proposizioni, di cui la prova diretta fu estremamente semplice.*

II. — Fu il primo BERTRAND di Ginevra, che diede un carattere di perfezione e di rigore alla teoria delle parallele; con dimostrare direttamente il *postulato* di EUCLIDE; mediante la considerazione degli spazii indefiniti, separati da tutto il resto del piano, da linee rette indefinite ad angolo fra loro, o parallele: e sulle

traccie di lui, altri geometri, come LEGENDRE (*), variarono poi a piacere siffatte dimostrazioni: ma nacquero pure allora di nuove differenze fra i geometri; non volendo altri ammettere la considerazione *degli spazii indefiniti* in geometria; e in generale dell'*infinito* nella teoria delle parallele; impugnandola come estranea alla questione, e soggetta a molti inconvenienti.

Or sebbene la mia opinione, che discorda affatto da quella di questi ultimi geometri, non sia per valere più che niente, in queste materie; pure non mi lascio perciò dal manifestarla, come la sento in me; facendomi anzi a indicare brevemente quelle riflessioni, che me la fecero abbracciare di preferenza; e che possono, se non altro, giustificarmi da questo lato, di non aver ciò fatto per servile imitazione, e cieca deferenza ai primi; ma solo per propria intima convinzione.

III. — Da prima che nella teoria delle parallele, si voglia escludere la considerazione dell'*infinito*, ella mi par cosa non solo contraddittoria in se, e colla natura stessa di queste linee, ma pur anche impossibile. Infatti nella stessa definizione delle rette parallele (n° 44), è compresa l'idea dell'*infinito*; rinvenendo essa a dire che *due rette sono parallele, quando non possono mai incontrarsi, benchè pro-*

(*) Vedi la Memoria di LEGENDRE, che ha per titolo: « *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles etc.* » inserita nel tomo XII delle Memorie dell'Accademia Reale delle scienze dell'Istituto di Francia; per l'anno 1833.

lungate entrambe all'infinito; onde sarebbe contraddicente a questa data definizione delle parallele, il voler poi fare totalmente astrazione dall'infinito nello stabilirne la teoria.

Ma inoltre ella mi par cosa impossibile; come forse apparirà anche agli altri, dietro le seguenti considerazioni.

Invece di cercare a trasportare la difficoltà, consideriamola qual essa si presenta nello stesso teorema H, che si tratta di dimostrare, — nella supposizione, che nulla siasi ancor stabilito sulla teoria delle parallele, dalla loro definizione in fuori; e dal teorema I (n° 43), che è lo stesso che quello del n° 22.

Questo teorema H rinvie alla questione seguente:

Due rette, situate nello stesso piano, sono supposte parallele: si vuole dimostrare; dietro questa sola condizione, che desse tagliate da una terza, riuscireanno su questa ugualmente inclinate, nello stesso senso.

Ancora non si conosce alcuna proprietà delle parallele, da quella in fuori; compresa nella loro definizione, di non mai incontrarsi, prolungate pure all'infinito: dunque nella dimostrazione del proposto teorema, non si potrà altrimenti tener conto dell'unica condizione espressa nel suo enunciato, cioè del parallelismo delle due rette; se non considerando queste appunto come due rette, che mai non si incontrino, prolungate ambedue all'infinito; altro carattere non avendosi per esprimere in modo equivalente la stessa condizione. E di tal maniera, come

sarà dunque possibile di evitare la considerazione dell'infinito, in questa circostanza, dove esso è dato per l'unica condizione del teorema che si vuol dimostrare? Non sarebbe egli questo un non tener conto, nella dimostrazione di un teorema, di una condizione essenziale espressa nel suo enunciato, e che costituisce il teorema medesimo; di cui esso è una immediata conseguenza? E ciò non è proprio contro il carattere dei teoremi di geometria; e contro lo spirito delle loro dimostrazioni? Ma si chiederà forse in qual modo si possa tener conto, nella presente questione, della condizione dell'infinito? Ben qui sta il difficile, rispondo, nel farlo d'una conveniente maniera (*); ma non è meno vero perciò, che non se ne possa prescindere. E pertanto se prendendo a questo modo la questione, si viene quasi a toccar con mano l'impos-

(*) Secondo i principii sugli spazii indefiniti, stabiliti da LEGENDRE, nella sua citata Memoria, — lo spazio indefinito compreso fra due parallele e una secante, da una parte di questa (spazio a cui LEGENDRE dà l'appellazione di *biangolo*), sarebbe trascurabile a fronte degli spazii angolari indefiniti, compresi fra i lati degli *angoli corrispondenti*, che formano colla secante le parallele dalla stessa parte di questa; onde questi spazii angolari sarebbero come fra loro equivalenti, malgrado che abbiano quel *biangolo* per differenza; e perciò saranno uguali gli *angoli corrispondenti*, che li comprendono.

Si vede così come, per la considerazione dell'infinito, si pervenga direttamente alla conclusione desiderata, partendo dall'unica condizione del supposto parallelismo delle due rette. Ma questo modo di dimostrar la cosa, non sarebbe però alla portata dei principianti: potendo far difficoltà il trascurare quel *biangolo* a fronte di quelli spazii angolari, perchè di questi infinitamente minore, quantunque esso parè infinito. Solo l'ho indicato, come una conferma di quanto io vengo di asserire.

bilità di evitare la considerazione dell'infinito nella teoria delle parallele; — si spererà egli mai di poterla forse evitare, cercando a trasportare la difficoltà, in qualunque modo; riducendola alla dimostrazione diretta di altri teoremi, che hanno col principale una immediata relazione; cosichè seguirebbe questo da quelli, e *viceversa*, secondo che venissero o quelli, o questo prima dimostrati? Lo spirito e il carattere dei teoremi di geometria ci dovrebbe abbastanza persuadere su questo punto dell'impossibilità assoluta, in qualunque modo si prenda la questione; e la geometria offre bene a proposito esempi diversi, che possono col presente compararsi.

Infatti si dimostra in *Geometria analitica*, che il problema della trisezion dell'angolo, o della duplicazione del cubo dipende da un'equazione di 3° grado; e si conchiude subito da questo, esser dunque impossibile di sciogliere la questione colla sola linea retta, e col circolo, che non danno la soluzione dei problemi, oltre al 2° grado; esser impossibile di pervenirvi, in qualunque altra maniera si prenda la questione, che da quella equazione di 3° grado non dipenda. Lo stesso mi pare si possa dire nel caso presente: dimostrandosi *per una maniera* l'impossibilità di evitare la considerazione dell'infinito nella teoria delle parallele; e riconoscendosi inoltre esser ciò impossibile per la natura stessa della questione, che si tratta; si dovrà concludere, che pure non sarà mai possibile, in qualunque altra maniera si cerchi a prendere la questione medesima.

E in questa conclusione tanto più sono inclinato a convenire, in quanto che vedo non mai di fatto essersi pervenuti a stabilire d'una maniera rigorosa la teoria delle parallele, se non quando appunto si prese a tener conto in questa teoria, della condizione dell' infinito; come fece BERTRAND d'una maniera figurata, per la considerazione degli spazii indefiniti: onde sarebbe ragione di indurne, che se per l'avanti mai non si ottenne un simile vantaggio, ciò dipendeva da che non si teneva allora conto d'una condizione essenziale, di cui non si potea far a meno; e che valeva ad esprimere in un modo geometrico, quanto solo colle parole si veniva a supporre. E inoltre il non tenerne conto, dipendeva forse da che non se ne sapea scorgere bene a fondo la necessità, e l'impossibilità di fare altrimenti, nel modo che comunemente si prendeva la questione; come per es. quando si intendeva a dimostrare il *postulato* di EUCLIDE; il quale considerato in se, a prima vista non si comprende come non possa dimostrarsi senza la considerazione dell' infinito; ciò che invece appare chiaro e manifesto nel modo sopra indicato, rimontando agli elementi della questione.

IV. — Convenuti dell'impossibilità di evitare la considerazione dell' *infinito* nella teoria delle parallele, — l'oggetto del geometra non dovrà ormai essere altro che quello di cercare a presentarla sotto l'aspetto più semplice, e più conveniente possibile; trasportando pure la difficoltà, come creda meglio: al qual propo-

sito non so se io avrò bene adempito coll'immaginata dimostrazione di quel teorema, che posi (n° 47) qual *lemma fondamentale* della teoria delle parallele.

Intorno a ciò giova però avvertire, come non sono altrimenti spazii *infiniti assoluti* quelli che occorre di considerare in questa, e in simili circostanze; ma sì invece spazii *infiniti relativi*; cioè solo *infiniti*, per rapporto ad ogni qualunque quantità finita; mentre essi ammettono poi dei rapporti finiti qualunque fra loro medesimi; come per es. sarebbero rapporti per *quoziente*, nella dimostrazione di BERTRAND del *postulato* di EUCLIDE; ed invece rapporti per *differenza* in quella esposta al n° 47: e questa qualità di *spazii infiniti relativi*, si può bene esprimere, chiamandoli *spazii indefiniti*, come sempre innanzi si è fatto. « *C'est plutôt une étendue actuellement indéfinie* (dice LACROIX, nota citata), *qu'actuellement infinie, qu'il faut supposer aux plans*; » e così che fa d'uopo supporre a quelli spazii medesimi separati, da tutto il resto del piano, da linee rette indefinite parallele, o ad angolo fra loro.

V. — Ritornando qui sulla dimostrazione esposta al n° 47, avvertirò in che consista lo spirito della medesima.

L'ipotesi che si fa (e che si vuol quindi dimostrare assurda) è — che le rette D'D, E'E (*fig. 16*), condotte per lo stesso punto C, siano ad un tempo parallele alla stessa retta AB: considerando queste rette indefinite in amb' i sensi, ne vien subito di conseguenza, che gli

spazii indefiniti $AB-D'D$, $AB-E'E$ siano della stessa specie; cioè determinati da rette parallele tanto l'uno come l'altro: donde si vede che l'ipotesi primitiva — delle rette $D'D$, $E'E$ parallele ad AB — si cangia subito in quest'altra, che — gli spazii indefiniti $AB-D'D$, $AB-E'E$ siano della stessa specie; — e di tal maniera si viene già a tener conto della condizion dell' *infinito*. Resta a vedere le conseguenze a cui conduce questa supposizione, che gli spazii indefiniti $AB-D'D$, $AB-E'E$ sianò della stessa specie: se esse saranno giuste, niun dubbio che l'ipotesi sia giusta; ma se saranno false, falsa pure si dovrà dichiarare l'ipotesi fatta; per cui detti spazii non potranno mai essere della stessa specie; e quindi se l'uno di essi sia di rette parallele, l'altro sarà necessariamente di rette inclinate, che, prolungate a sufficienza, dovranno incontrarsi.

Or prima conseguenza di questa ipotesi, che — gli spazii indefiniti $AB-D'D$, $AB-E'E$ siano della stessa specie, — si è che dessi saranno dunque equivalenti; componendosi così ciascuno di uno spazio comune indefinito $AB-E'CD$, e di uno spazio indefinito uguale $E'CD'$ ed ECD . Ma della stessa maniera — conducendo per un punto I di $E'E$, o meglio di CE , una nuova parallela $II'H$ a $D'D$, che riuscirà pure parallela ad AB , — gli spazii indefiniti $AB-E'E$ e $AB-II'H$ sarebbero della stessa specie, e perciò fra loro equivalenti; componendosi pur ciascuno di uno spazio comune indefinito $AB-E'IE$, e di uno spazio indefinito uguale $E'IH'$ ed EIH ; dunque gli spazii indefiniti $AB-D'D$, $AB-II'H$ sarebbero equivalenti fra loro, come equivalenti allo stesso $AB-E'E$;

conclusione manifestamente falsa: dunque è falsa l'ipotesi che i primi spazii indefiniti $AB-D'D$, $AB-E'E$ siano della stessa specie; dunque essi saranno di specie differenti; e perciò se l'uno di rette parallele, l'altro sarà di rette inclinate; e quindi impossibile che pel punto C si possa mai condurre più d'una sola parallela ad AB .

È da osservarsi come questa dimostrazione si fonda tutta essenzialmente sulla data definizione delle rette parallele; della cui proprietà di non mai incontrarsi, fassi qui un uso continuo.

Però di tutta la discussione precedente, sarebbe forse meglio farne a meno, nell'esposizione di tale dimostrazione a principianti; bastando la falsità della conclusione a cui si perviene, per doverne subito indurre quella dell'ipotesi fatta (*).

VI. — Nell'oggetto che solo, a mio parere, deve ormai prefiggersi il geometra nella teoria delle paral-

(*) Fondandosi sulla considerazione degli spazii indefiniti della stessa specie, si potrebbe direttamente dimostrare quest'altro teorema:

Due rette $[AB, CD]$ parallele a una terza $[EF]$, sono parallele fra loro.

Infatti gli spazii indefiniti $AB-EF$, $CD-EF$ essendo per ipotesi della stessa specie, cioè di rette parallele tanto l'uno come l'altro, — lo spazio indefinito $AB-CD$, che è la loro differenza, o la loro somma, sarà pur necessariamente della stessa specie di quelli, e perciò di rette parallele; onde AB e CD saranno parallele. —

Di questo teorema così dimostrato si potrebbe allora far fondamento della teoria delle parallele; concludendosi immediatamente da esso quello del n° 46. Però onde ammettere questa dimostrazione, sarebbe necessario entrare in qualche discussione sulla natura degli spazii indefiniti della stessa specie, o di specie differente.

lele, di cercare a presentare la considerazione dell' *infinito*, sotto l'aspetto più semplice, e più conveniente possibile, — altre idee mi furono suggerite da' miei studii, dalle quali si potrebbe forse trarre utile partito: sebben quì non mi ardisca proporle in modo assoluto; solo limitandomi a indicarle piuttosto come mezzi idonei a far ben sentire la verità della cosa, che a dimostrarla rigorosamente.

Oltre l'idea dell' *infinito*, che si è veduto esser compresa nella definizione stessa delle rette parallele, una altra idea pure vi è compresa ad un tempo, cioè quella della loro *nulla inclinazione*, ossia del loro *angolo zero*; il quale è pure un infinito d' altra specie; dicendosi che *nulla è l'angolo* di due rette parallele, e *nulla la loro inclinazione*. Considerandosi il caso delle rette parallele come un particolare fra quelli delle rette inclinate sotto angoli qualunque, — se perciò si estendano al primo i teoremi generali, che si hanno rapporto ai secondi, niente di più facile allora che dimostrare tutta la teoria delle parallele; conchiudendosi immediatamente tutti i suoi teoremi più fondamentali, da quelli stabiliti nella teoria delle perpendicolari e delle oblique, quì innanzi esposta. Vediamo ciò brevemente; lasciando poi agli altri il giudicare del merito, e del valore di queste dimostrazioni.

Il teorema del n° 47 si conchiude immediatamente, come caso particolare, da quello del n° 21. Infatti due rette, condotte per uno stesso punto, parallele a una terza retta, sarebbero come due rette, condotte per quel punto, ugualmente inclinate, nello stesso senso,

sopra quella terza retta; il che è impossibile (n° 21): dunque pure impossibile, che per un punto fuori di una retta, si possa mai condurre a questa più d'una sola parallela.

Il teorema del n° 48 segue pure direttamente da quello del n° 22: poichè due rette parallele a una terza, sono come due rette ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra quella terza; ond'esse saranno fra loro parallele (n° 22, 45). Dunque due parallele a una terza, sono parallele fra loro.

Il teorema del n° 49 si conchiuderebbe pure procedendo dapprima come ivi si è fatto; ma dicendo in fine: la prima proposta parallela, e la nuova parallela per costruzione, sarebbero come due rette, condotte per uno stesso punto, ed ugualmente inclinate, nello stesso senso, sopra una stessa retta (la seconda parallela proposta); il che è impossibile (n° 21). Dunque ecc.

Se la secante sia perpendicolare all'una delle proposte parallele (n° 56), si conchiuderà direttamente che sarà pure perpendicolare all'altra, ragionando come segue.

Si consideri quest'altra come composta di due rette distinte, attorno al suo punto di divisione segnato dalla secante: queste due rette distinte essendo ad un tempo parallele alla prima parallela proposta, esse sono come due rette, condotte dall'una e l'altra parte della perpendicolare, ed ugualmente inclinate alla sottoposta; dunque esse saranno pure ugualmente inclinate alla perpendicolare (n° 16); ossia che gli angoli ivi adiacenti saranno uguali fra loro; e perciò *retto* ciascuno:

onde la secante condotta perpendicolare all' una , sarà pure perpendicolare all' altra proposta parallela.

Il teorema infine del n° 31, che rinviene al *postulato* di EUCLIDE, si dimostrerà direttamente come segue, per la considerazione dell' *angolo zero*.

Pel punto H (*fig. 17*) d' intersezione della CD colla EF, si conduca una nuova retta, che dirò HI, la qual faccia l'angolo $FHI = FGB$ (supposto, come in *figura*, $FHD > FGB$); ed un' altra retta, che dirò HL, perpendicolare sopra AB. Le due rette HD e HI sono come due oblique, condotte pel punto H della perpendicolare HL, e disugualmente inclinate su questa perpendicolare; dunque esse saranno (n° 14) pure disugualmente inclinate sulla sottoposta AB; e la HD, che fa colla HL un angolo $DHL < HIL$, farà colla sottoposta AB un angolo maggiore di quello che vi faccia la HL. Ma questa, pel n° 45, essendo parallela ad AB, vi fa un *angolo zero*; dunque la HD farà con AB un angolo maggiore di zero, ossia un angolo finito; e perciò le rette CD e AB, prolungate a sufficienza, si incontreranno in un punto comune. Inoltre questo punto d' incontro avrà luogo da quella parte della secante EF, da cui l'angolo esterno $FHD >$ dell' interno suo corrispondente FGB ; ossia da quella parte, dove la somma degli angoli interni $BGH + DHG < 2$ retti.

Si può rendere la cosa anche più sensibile immaginando condotte nell'angolo DHI quante rette si vogliono; le quali tutte riuscendo inclinate sulla perpendicolare HL d'angoli successivamente maggiori, dovranno risultare inclinate sulla sottoposta AB d'angoli successi-

vamente minori: onde sarebbe assurdo supporre che la HD potesse essere inclinata d'un angolo *zero* sopra AB, se tante altre rette ancora vi dovranno fare degli angoli di quello minori, i quali altrimenti sarebbero minori di *zero*: dunque le rette HD e AB non potranno mai essere parallele; e perciò, prolungate a sufficienza dovranno incontrarsi (*).

Di questo teorema così dimostrato si potrà allora far fondamento della teoria delle parallele; come si potrebbe fare di ogni altro qualunque dei precedenti.

Del resto non aggiungerò una parola in difesa di queste indicate dimostrazioni; se non solo per avvertire come l'idea dell'*angolo zero* sia forse per riuscire

(*) Indicherò qui un altro modo di dimostrar la cosa, facendo uso della condizion dell'*infinito*; nella considerazione dell'*infinita* lunghezza, a cui si può prolungare la retta HI, senza mai incontrare la sua parallela AB.

Si supponga che si voglia contare la distanza del punto fisso H alla retta fissa AB, sulle direzioni delle differenti oblique, che si possono condurre dal punto H ad AB. *Queste distanze variabili saranno tanto minori, quanto minori saran gli angoli delle loro direzioni colla perpendicolare HL (n° 14):* dunque la distanza del punto H alla retta AB, contata sulla direzione HD, sarà distintamente minore di quella contata sulla direzione HI. Or questa è infinita; perchè HI è per costruzione parallela ad AB (n° 45); dunque la prima sarà una distanza finita; e perciò HD prolungata dovrà incontrare AB.

Altrimenti condotte nell'angolo DHI quante più rette si vogliano, — le distanze del punto H alla retta AB contate su queste nuove direzioni, saranno tanto maggiori, quanto più si discostano dalla perpendicolare HL, e perciò dalla HD: onde sarebbe assurdo il supporre che la distanza contata sopra HD potesse essere infinita, se tante altre ve ne debbono ancora essere maggiori di quella: dunque HD non potrà mai essere parallela ad AB; e perciò prolungate queste rette a sufficienza, dovranno incontrarsi.

più semplice a' principianti, che non l'idea dell' *infinito*, nella considerazione degli spazii indefiniti: ma non si dee per altro dissimulare come siffatte dimostrazioni medesime sono pur tutte fondate sopra una concessione, di cui fia d'uopo prima convenire; cioè di ammettere per estesi al caso delle rette parallele, considerate come rette inclinate fra loro sotto un *angolo zero*, i teoremi generali stabiliti a riguardo delle rette inclinate sotto angoli finiti qualunque.

VII. — Qualsiasi il merito delle ultime esposte dimostrazioni, esse almeno non fanno che vieppiù manifestare il vantaggio della nuova immaginata teoria delle perpendicolari e delle oblique. Questo vantaggio si rileva ancor bene dalla data teoria delle parallele (n° 44, e seguenti); che tutta si viene a stabilire d'una maniera assai semplice, *indipendentemente dalla teoria dei triangoli uguali*; alla quale perciò si potrà sempre premettere; seguendo in ciò il sistema dei più moderni autori; col quale d'altronde conviene perfettamente la mia opinione; sebbene io abbia fatto il contrario in questa Memoria. E invero si è osservato (n° 43) come la teoria dei triangoli uguali non possa dirsi completamente dimostrata, se non si dà ragione della condizione che — fra i tre dati elementi uguali dei due triangoli, che si paragonano, *vi sia almeno un lato di ciascuno*; — ciò che non può farsi senza il teorema sulla *somma dei tre angoli d'un triangolo qualunque*; il quale si dimostra assai bene per la teoria delle parallele.

Alcuni geometri hanno tentato di dimostrare direttamente questo teorema, senza l'ajuto delle parallele; ma è forza convenire aver fatti pure degli inutili sforzi; essendo questo teorema della stessa difficoltà a dimostrarsi, che quello delle parallele; del che per convincersi, basti sapere, come da esso possa dedursi tutta la teoria delle parallele senza la considerazione dell'*infinito*.

LEGENDRE, che molto e indefessamente si occupò della dimostrazione di questo teorema (come si può vedere nella sua citata Memoria), propose del medesimo diverse dimostrazioni; alle quali, a dir vero, non si può negare tutta l'ingegnosità, e l'eleganza; ma son ben lungi (io credo) dall'adempiere allo scopo, che si avea prefisso, di semplificare la teoria delle parallele, mediante l'uso di tale teorema. Fra tutte queste però ne ebbi ad avvertire una, in quella sua Memoria, la quale mi sembrerebbe al certo la più semplice, e la più conveniente a seguirsi, quando la si volesse premettere alla teoria delle parallele: essa è quella, ch'io vado ad esporre alquanto modificata a mio modo.

Essendo ABC (*fig. 23*) il triangolo proposto, si prolunghino i suoi lati indefinitamente, ciascuno nel senso del suo successivo, come si vede in *figura*: sarà la somma dei sei angoli A, B, C, CBD, ACE, BAF uguale a sei *retti*: or si vuol provare che la somma dei tre angoli esterni CBD, ACE, BAF sarà sempre uguale a quattro *retti*; per cui resterà la somma dei tre angoli interni A, B, C uguale a due *retti*.

Si considerino gli spazii indefiniti DBE, ECF, FAD, separati da tutto il resto del piano dai lati indefiniti dei

tre angoli esterni DBC, ECA, FAB: la somma di questi angoli non potrà esser maggiore di quattro *retti*; perchè solo quattro *retti*, riuniti allo stesso punto, occuperebbero tutta l'area del piano indefinito; mentre quelli pel loro insieme, ossia gli spazii corrispondenti non valgono pure a occupare tutta quest'area indefinita del piano; mancandovi ancor sempre quella del triangolo ABC. Ma inoltre la somma degli stessi tre angoli esterni non potrà mai esser minore di quattro *retti*: poichè se fosse l'angolo M il complemento di questa somma a quattro *retti*, — sarebbe pure l'area di quest'angolo M il complemento della somma dei tre spazii indefiniti DBE, ECF, FAD, a tutta l'area del piano indefinito, il quale complemento è per sé d'altronde l'area del triangolo ABC; onde dovrebbe essere quest'area finita ABC equivalente all'area indefinita dell'angolo M; il che è impossibile. Dunque la somma dei tre angoli esterni CBD, ACE, BAF non potendo essere maggiore nè minore di quattro *retti*, sarà esattamente uguale a quattro *retti*; e perciò, tolta essa da sei *retti*, resterà la somma dei tre angoli interni A, B, C, del triangolo ABC, uguale a due *retti* (*).

Ma si può prendere ancora la questione in altro modo, per cui la considerazione degli spazii indefiniti sarebbe ridotta a ben poco.

(*) Collo stesso metodo si può dimostrare esser la somma degli angoli esterni d'un poligono qualunque sempre uguale a quattro *retti*; da che si deduce la somma degli angoli interni = $2(n-2)$ *retti*, essendo n il numero dei lati.

Gli sforzi di LEGENDRE arrivarono a dimostrare d'una maniera geometrica, che la somma dei tre angoli A, B, C d'un triangolo qualunque ABC non può esser maggiore di due *retti*; ciò che può vedersi nella sua più volte citata Memoria alla *proposizione* distinta colla lettera A : ma tutta la difficoltà sta ancora nel dimostrare come la stessa somma non possa esser minore di due *retti*; difficoltà, che dovette LEGENDRE conoscere per prova quanto sia grande a superarsi con mezzi puramente geometrici. Or questo che riesce sommamente difficile a dimostrarsi, alla maniera che si voleva da LEGENDRE, riesce invece estremamente facile a conchiudersi, quasi all'evidenza, per la considerazione degli spazii indefiniti compresi fra i lati dei tre angoli esterni, che risultano, prolungando indefinitamente ciascun lato del triangolo ABC nel senso del suo successivo; come sopra si è indicato. Infatti la somma dei tre angoli esterni, e dei tre angoli interni equivalendo a sei *retti*, — se si supponesse che la somma dei tre interni fosse minore di due *retti*, — ne verrebbe che la somma dei tre angoli esterni sarebbe allora maggiore di quattro *retti*; il che non può essere; perchè solo quattro *retti* occupando tutta l'area del piano indefinito, quei tre angoli esterni non vengono pure a occupare questa; mancandovi ancor qualche cosa, l'area del triangolo ABC : dunque la somma dei tre angoli interni A, B, C non potrà mai esser minore di due *retti*. E siccome in virtù della su indicata *proposizione A*, essa non può di già essere maggiore di due *retti*; la stessa somma sarà adunque esattamente uguale a due angoli *retti*.

A questo modo mi pare che si potrebbe dimostrare il teorema sulla somma dei tre angoli del triangolo, con sufficiente chiarezza, semplicità, e rigore; quando si volesse premettere alla teoria delle parallele: ma però siccome questo metodo sarebbe pure un trasporto della difficoltà di questa teoria, con di più lo svantaggio di venirne ad occultare la sede naturale, così mai io non lo crederei conveniente a seguirsi, in un trattato di *Elementi* di Geometria.

Inoltre, se per le addotte ragioni, già converrebbe posporre la teoria dei triangoli uguali a quella delle parallele, io opinerei di posporla ancora ad altre teorie, come fu praticato da alcuni autori; ciò sembrandomi che più si accordi con una ben' intesa classificazione delle diverse materie, che sono d'appartenenza della Geometria elementare. Giudico quì a proposito di indicare brevemente il piano generale d'un nuovo trattato di *Elementi*, che secondo il mio modo di vedere mi sembrerebbe assai logico, e bene inteso.

Io dividerei, come al solito, tutta la geometria elementare in due grandi parti; delle quali nella prima si comprendano le materie appartenenti alla *geometria piana*; nella seconda le materie appartenenti alla *geometria solida* [espressioni usate per brevità di discorso, benchè non molto proprie in se stesse]. Ciascuna parte la dividerei in quattro *capi* distinti, de' quali ecco l'oggetto di ciascuno in particolare.

CAPO I. — RELAZIONI DI POSIZIONE DELLE LINEE IN UN PIANO : —

in cui si tratti — delle rette che si tagliano; — delle perpendicolari e delle oblique; — delle parallele; — delle rette col circolo; — dei circoli fra loro; — ed in un ultimo paragrafo — della misura degli angoli per mezzo di archi di circolo dello stesso raggio. —

Sarà facil vedere in vero come tutte le proposizioni che occorreranno di dimostrarsi in questo *Capo I*, siano appunto tutte proposizioni dipendenti dalla *posizione relativa delle linee*, che si considerano: donde risultano poi le figure piane propriamente dette.

CAPO II. — RELAZIONI D' UGUAGLIANZA E D' EQUIVALENZA DELLE FIGURE PIANE : —

in cui si tratti — dei triangoli uguali; — dei poligoni uguali; — e per seguito si esponano tutte quelle proposizioni di *geometria pura*, che si possono dimostrare coi semplici principii d'uguaglianza dei triangoli; come sono i casi più semplici d'equivalenza dei parallelogrammi, dei triangoli, dei trapezii ecc.; — il teorema di PITAGORA; — e più generalmente quei teoremi che formano l'oggetto della 1^a e 2^a parte della mia pubblicata Memoria *sui rapporti delle figure*. —

CAPO III. — RELAZIONI DI QUANTITÀ DELLE LINEE; E SIMILITUDINE DELLE FIGURE PIANE : —

in cui si tratti — delle rette proporzionali; — dei triangoli simili (esponendo tutti quei teoremi generali dimostrati nella mia Memoria *sui triangoli simili*); —

dei poligoni simili; — della misura della circonferenza del circolo. —

CAPO IV. — RELAZIONI DI QUANTITÀ DELLE AREE DELLE FIGURE PIANE: —

in cui si tratti — dei rapporti generali, e della misura delle aree delle figure rettilinee, e del circolo; dei rapporti delle aree delle figure piane simili fra loro: — facendo a suo luogo avvertire la corrispondenza immediata di alcune proposizioni generali dimostrate nei due capi precedenti. —

CAPO V. — RELAZIONI DI POSIZIONE DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE NELLO SPAZIO: —

in cui si tratti — delle rette, e dei piani perpendicolari, obliqui, e paralleli nello spazio; — degli angoli solidi; — dei piani colle superficie sferiche, cilindriche, e coniche; — di queste superficie fra di loro; — ecc.

CAPO VI. — RELAZIONI D' UGUAGLIANZA E D' EQUIVALENZA DELLE FIGURE SOLIDE: —

in cui si tratti — dell'uguaglianza dei prismi, delle piramidi, ecc.; — esponendo per seguito tutte quelle proposizioni di *geometria pura*, che riguardano i casi più semplici d'equivalenza di queste ed altre figure solide. —

CAPO VII. — RELAZIONI DI QUANTITÀ DELLE SUPERFICIE DELLE FIGURE SOLIDE; — E SIMILITUDINE DI QUESTE FIGURE: —
in cui si tratti — della misura delle superficie delle

figure solide comprese fra piani; — delle superficie delle sfere, dei triangoli sferici, dei cilindri, dei coni, ecc. — e dei casi di similitudine di tali figure solide. —

CAPO VIII. — RELAZIONI DI QUANTITÀ DEI VOLUMI DELLE FIGURE SOLIDE: —

in cui si tratti — dei rapporti generali, e della misura dei volumi delle principali figure solide; — dei rapporti dei volumi di queste figure, nei casi di loro similitudine; — ecc.

Non entrerò in maggiori dettagli su questo proposito; ciò che non potrei fare senza dilungarmi di troppo dal mio oggetto principale: onde tacerò per intiero delle viste diverse, secondo le quali avrei poi in pensiero di condurre un tale trattato di *elementi* di geometria; quale è per me *in votis* di comporre un giorno; *se mai avrò modo* di realizzare questo mio disegno.

F.^o P. CABINIRO MURAGLIA *Rev. Eccl.*

V. per la stampa

G. P. VERCELLONE *Rev. per la Grande Cancelleria*

678708

Fig. 3.

F B A

7



Fig. 12.



Fig. 14

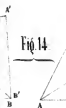
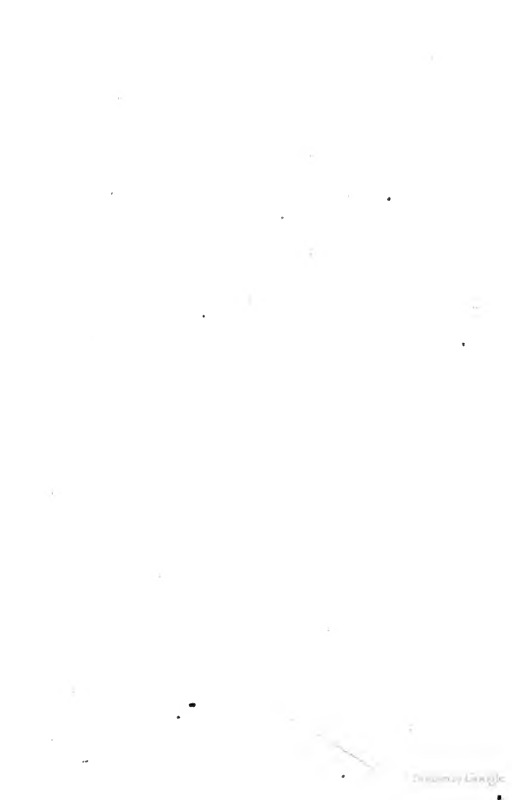
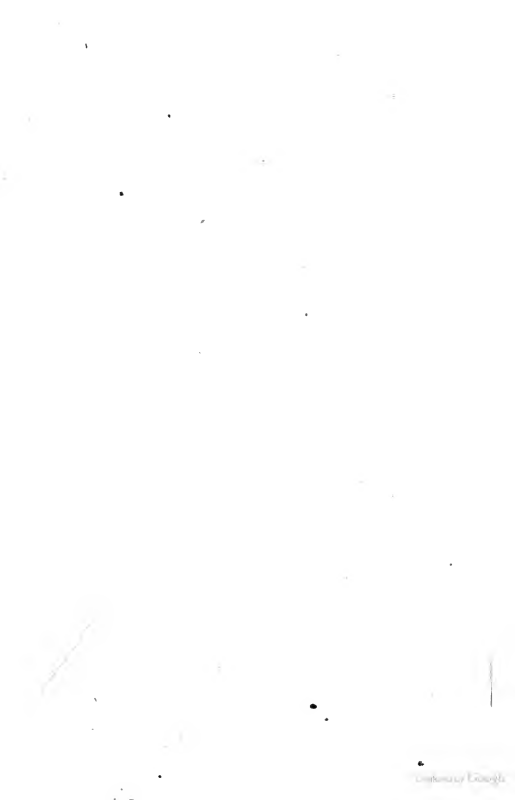


Fig. 18.







BIBLIOTECA

E
Mi